福建农林大学考试试卷 （ A ） 卷

2020——2021 学年 第 二 学期

课程名称：____高等数学 B2/C2____ 考试时间：____120 分钟____

________专业______年级____班 学号________姓名________

得分

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个偏导数都存在，是 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微的（　　　）．

（A）充分条件而非必要条件　　（B） 必要条件而非充分条件

（C）充分必要条件　　（D） 既非充分条件又非必要条件

2．利用拉格朗日乘数法求函数 $f(x,y)=xy$ 在条件 $x-y=1$ 下的极值时，对应的拉格朗日乘数 $\lambda=$（　　　）．

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）0　　（C）1　　（D）2

3． yoz 平面上的曲线 $\begin{cases} y^2+2z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成的曲面是（　　　）．

（A） $x^2+y^2+2z^2=1$　　（B） $x^2+y^2+2z^2=-1$

（C） $2x^2+y^2+2z^2=1$　　（D） $2x^2+y^2+2z^2=-1$

4．设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$，则下列积分值等于零的是（　　　）．

（A） $\iint\limits_D x^2 d\sigma$　　（B） $\iint\limits_D y^2 d\sigma$　　（C） $\iint\limits_D \sin x d\sigma$　　（D） $\iint\limits_D \sin y d\sigma$

5．下列级数一定发散的是（　　　）．

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$　　（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$　　（C） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$

得分

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

6．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin(xy+xy^2\cos x)}{x}=$ ________________________________.

7．设函数 $u=f(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z},\dfrac{z}{x})$， f 具有连续偏导数，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$ ____________________.

8．设函数 $z=x\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________________________________.

9. 交换积分次序 $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx=$ ________________________________.

10．将函数 $f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数，不要求写出收敛域，则

$f(x)=$ ____.

得分

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

11．设 $f(x,y)=x+(y-1)\arccos(\dfrac{x}{y})$，求 $f_x(0,1)$， $f_y(0,1)$.

12．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=x-e^{y+z}$ 确定，求 dz .

13．求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3xy$ 的极值.

14. 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sin x}{x}d\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2$， x 轴与 $x=\pi$ 所围成的闭区域.

15．计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)^{-2}d\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2\le 2x$ 和 $x\ge 1$ 所确定的区域.

得分

四、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

16. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$ 是否收敛？如果收敛，判别是绝对收敛还是条件收敛？

17.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$ 的收敛域及其和函数.

得分

五、讨论题（10 分）

18.设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论（1）函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点是否连续？

（2）函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的偏导数是否存在？

附答案：

一、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．B；　2．A；　3．C；　4．D；　5．B

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6. $\underline{2}$ ；　7. $\underline{\dfrac{1}{y}f_1' - \dfrac{z}{x^2}f_3'}$ ；　8. $\underline{\dfrac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}}$ ；

9. $\underline{\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy}$ ；　10. $\underline{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3x^{2n+1}}$

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

11．解：由于 $f(x,1)=x$，则 $f_x(0,1)=\dfrac{d}{dx}f(x,1)\Big|_{x=0}=1$，

由于 $f(0,y)=\dfrac{\pi}{2}(y-1)$，则 $f_y(0,1)=\dfrac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=1}=\dfrac{\pi}{2}$.

12. 解：令 $F(x,y,z)=z-x+e^{y+z}$， $F_x=-1$， $F_y=e^{y+z}$， $F_z=1+e^{y+z}$，

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+e^{y+z}},\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{-e^{y+z}}{1+e^{y+z}},$$

$$dz=z_x dx+z_y dy=\frac{1}{1+e^{y+z}}dx+\frac{-e^{y+z}}{1+e^{y+z}}dy.$$

13. 解：$\begin{cases} f_x=3x^2+3y=0 \\ f_y=-3y^2+3x=0 \end{cases}$，得驻点为：$(0,0)$，$(1,-1)$，

$f_{xx}=6x$， $f_{xy}=3$， $f_{yy}=-6y$，

对于驻点 $(0,0)$， $A=f_{xx}(0,0)=0$， $B=f_{xy}(0,0)=3$， $C=f_{yy}(0,0)=0$，

由于 $AC-B^2<0$，故 $(0,0)$ 点不是极值点.

对于驻点 $(1,-1)$， $A=f_{xx}(1,-1)=6$， $B=f_{xy}(1,-1)=3$， $C=f_{yy}(1,-1)=6$，

由于 $AC-B^2>0$，且 $A>0$，故极小值为 $f(1,-1)=-1$.

14. 解：$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}d\sigma=\int_0^{\pi}dx\int_0^{x^2}\frac{\sin x}{x}dy=\int_0^{\pi}x\sin xdx$

$$=-\int_0^{\pi}xd\cos x=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos xdx=\pi .$$

15. 解：$\iint\limits_D (x^2+y^2)^{-2}d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta}^{2\cos\theta}\rho^{-4}\rho d\rho$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4}\sec^2\theta-\cos^2\theta)d\theta=-\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\tan\theta-\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

四、计算题（每小题 10 分，共 20 分）

16. 解：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right|$，由于 $\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(n\to\infty)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}\right|$ 发散.

（2）对于 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$，令 $v_n=\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$，显然 $v_n\to 0$，$(n\to\infty)$，

$v_n=\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{n^2}}}$，设 $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$，（不妨设 $x\geq 2$），

$f'(x)=1-2\frac{1}{x^3}>0$，（当 $x\geq 2$），则 v_n 单调减少。

故原级数满足莱布尼兹判别法，从而知该级数收敛，所以原级数条件收敛.

17. 解：令 $a_n=\frac{1}{n2^n}$，$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n}=2$，

当 $x=2$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，当 $x=-2$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，

故收敛域为 $[-2,2)$.

设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$ ， $x\in[-2,2)$ ， $s'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{2-x}$,

两边积分得： $s(x)-s(0)=\int_0^x\frac{1}{2-t}dt=-\ln\frac{2-x}{2}$,

故 $s(x)=-\ln\frac{2-x}{2}=\ln\frac{2}{2-x}$ ， $x\in[-2,2)$.

五、讨论题（10 分）

18．解：（1）

方法 1： $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0^+}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2}=0=f(0,0)$,

方法 2：由于 $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{y}{2}\right|$,由于 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y}{2}=0$,则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$,

故函数在 $(0,0)$ 点连续；

（2） $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$,

同理 $f_y(0,0)=0$ ，故函数在 $(0,0)$ 点的偏导数存在.